

Finite-Temperature Lanczos Methode

Burkhard Schmidt und Peter Thalmeier

Überblick

Wir haben eine Methode zur Berechnung temperaturabhängiger Eigenschaften von Modell-Hamiltonoperatoren für stark korrelierte Elektronensysteme auf kleinen Clustern implementiert. Mit dieser Methode können sowohl thermodynamische Größen wie die spezifische Wärme oder die magnetische Suszeptibilität als auch beliebige statische Korrelationsfunktionen ausgerechnet werden. Basis ist der Lanczos-Algorithmus [1], der für die iterative Diagonalisierung der Hamilton-Matrix des betrachteten Clusters verwendet wird. Die Methode wurde ursprünglich von Jaklic und Prelovsek für das t - J -Modell zur Beschreibung der Kuprate entwickelt [2,3].

Ziel unserer Implementierung der Finite-Temperature Lanczos Methode (FMTL) war, ein flexibles Programmpaket zu entwickeln, das leicht an neue Fragestellungen und dazugehörige Modelle angepaßt werden kann. Dazu gehören erweiterte Hubbard- und Isospin-Modelle für Ladungsordnungsphänomene sowie frustrierte Spinsysteme. Diese Modelle spielen eine wichtige Rolle bei der Beschreibung der Vanadate [4,5] und Manganate. Daher wurde das Hauptaugenmerk auf die Entwicklung eines stark modularisierten Programmcodes mit konsistenten Schnittstellen zwischen den einzelnen Modulen gelegt. Beispielsweise ist das Modul zur Beschreibung des Clusters, des Hamiltonoperators und der Basis für die aktuelle Rechnung der einzig zu ändernde Teil, will man einen neuen Hamiltonoperator zum Beispiel für Spin 1 statt 1/2 implementieren. Wir benutzen das GNU autoconf System, um den Programmcode zu strukturieren und portierbar zu gestalten. Aus Geschwindigkeits- und Portabilitätsgründen nutzen wir Fortran 77 als Haupt-Programmiersprache. Die Modelle, welche wir bisher behandelt haben, sind erweiterte Hubbard-Modelle mit einem Hamiltonoperator der Form

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\sigma} J_{ij} a_{i\sigma}^{\dagger} a_{j\sigma} + \sum_{i\sigma} \epsilon_i n_{i\sigma} + \sum_i U_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} + \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\sigma\sigma'} V_{ij} n_{i\sigma} n_{j\sigma'}, \quad (1)$$

wobei $\sum_{\langle ij \rangle}$ eine Summation über Bindungen bedeutet, die nicht notwendigerweise nur Nächste-Nachbar-Orbitale betreffen. Alle auftretenden Wechselwirkungen können von dem oder den angegebenen Gitterplatz-Indices abhängen. Auf die gleiche Weise haben wir Spin-1/2-Modelle implementiert, mit einem Hamiltonoperator der allgemeinen Form

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\alpha\beta} S_i^{\alpha} J_{ij}^{\alpha\beta} S_j^{\beta}. \quad (2)$$

In diesem Fall kann die Matrix \mathbf{J}_{ij} eine gitterplatzabhängige uniaxiale Anisotropie genauso wie eine antisymmetrische (Dzyaloshinskii-Moriya) Austauschwechselwirkung enthalten. Auch hier bezeichnen i und j nicht unbedingt Nächste-Nachbar-Plätze, wodurch wir frustrierte Spinsysteme wie zum Beispiel den zweidimensionalen Heisenberg-Antiferromagneten behandeln können, ohne irgend etwas am Programmcode ändern zu müssen.

Im folgenden beschreiben wir die FMTL für die Berechnung des Erwartungswertes eines beliebigen

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{N_n} \langle n | e^{-\beta H} A | n \rangle}{\sum_{n=1}^{N_n} \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle}. \quad (3)$$

statischen Operators A bei endlicher Temperatur. Die Verallgemeinerung auf komplexere, insbesondere zeitabhängige, Erwartungswerte ist offensichtlich und wird in Zukunft implementiert werden.

Beschreibung der Methode

Wie man Gleichung 3 entnimmt, erfordert die Spur über den statistischen Operator im Prinzip die Kenntnis *aller* Eigenwerte und Eigenfunktionen des Hamiltonoperators. Die Anzahl dieser steigt

Finite-Temperature Lanczos Method

Burkhard Schmidt und Peter Thalmeier

Overview

We have implemented a method for the calculation of temperature dependent properties of model Hamiltonians for strongly correlated electron systems of small clusters. This includes the evaluation of thermodynamic quantities like specific heat or magnetic susceptibility as well as arbitrary static correlation functions. The method is based on the Lanczos algorithm [1] which is used to iteratively diagonalize the Hamiltonian matrix for the cluster considered. It was originally introduced and applied to the t - J model for the cuprates by Jaklic and Prelovsek [2, 3].

Our goal in implementing the finite-temperature Lanczos method (FTLM) was to create a flexible program package which can easily be adapted to new problems and corresponding models. Among these are extended Hubbard and isospin models for charge-ordering phenomena as well as frustrated spin systems. These models are important for the vanadates [4, 5] and manganites. Therefore, the main focus in the development was on a highly modularized code and a consistent interface between the individual routines. For example, the module used to describe the cluster, the Hamiltonian, and the basis for the current calculation is the only part of the code which needs to be modified in case one wants to implement a new Hamiltonian, say, for spin 1 instead of 1/2. We use the GNU autoconf system to keep the source code organized and portable. For the sake of speed and portability, Fortran 77 is the main programming language used.

The models we have considered so far are of the extended Hubbard type with a Hamiltonian of the form

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\sigma} t_{ij} a_{i\sigma}^{\dagger} a_{j\sigma} + \sum_{i\sigma} \epsilon_i n_{i\sigma} + \sum_i U_i n_{i\uparrow} n_{i\downarrow} + \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\sigma\sigma'} V_{ij} n_{i\sigma} n_{j\sigma'}, \quad (1)$$

where $\sum_{\langle ij \rangle}$ indicates a sum over bond, which are not necessarily connecting only nearest-neighbor

orbitals. All interactions can depend on the indicated site indices.

In the same way we have implemented spin-1/2 models, described by a Hamiltonian of the general form

$$H = \sum_{\langle ij \rangle} \sum_{\alpha\beta} S_i^{\alpha} J_{ij}^{\alpha\beta} S_j^{\beta}. \quad (2)$$

In this case, the matrix \mathbf{J}_{ij} can have a site-dependent uniaxial anisotropy as well as an antisymmetric (Dzyaloshinskii-Moriya) exchange interaction. Again, i and j do not necessarily label nearest-neighbor sites which enables us to study frustrated spin systems like, e.g., the two-dimensional frustrated Heisenberg antiferromagnet without any modifications of the code.

In what follows, the FTLM is described for the case of the expectation value of an arbitrary static operator A at finite temperatures,

$$\langle A \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{N_{st}} \langle n | e^{-\beta H} A | n \rangle}{\sum_{n=1}^{N_{st}} \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle}. \quad (3)$$

The generalization to more complex, in particular time dependent expectation values is straightforward and will be implemented in the future.

Outline of the Method

As is seen from Equation 3, the trace over the statistical operator in principle requires the knowledge of *all* eigenvalues and eigenfunctions of the Hamiltonian. The number of these increases exponentially with the cluster size and scales, for example, like $N_{st} \propto 4^N$ for the Hubbard model where N is the number of orbitals of the cluster under consideration. This number can be reduced by a factor at most proportional to N^2 taking into account spatial and spin symmetries.

On the other hand, the exponential smallness of the Boltzmann factor in the expectation value, Eq. 3, enables one to restrict the sum to the “few” lowest eigenvalues and their eigenvectors having the “largest” weight in the sum. (The use of the quota-

exponentiell mit der Clustergröße und skaliert zum Beispiel wie $N_{\text{st}} \propto 4^N$ für das Hubbard-Modell, wobei N die Zahl der Orbitale des Clusters ist. N_{st} kann um einen Faktor reduziert werden, der bestenfalls proportional zu N^2 ist, berücksichtigt man Spin- und räumliche Symmetrien. Auf der anderen Seite ermöglicht die exponentielle Kleinheit des Boltzmann-Faktors im Erwartungswert, die Summation in Gleichung 3 auf "wenige" niedrigliegenden Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren, die das "größte" Gewicht in der Summe haben, zu beschränken. (Die Bedeutung der Anführungszeichen wird später klar werden, wenn wir Abschätzungen der Parameter angeben, welche die Begriffe "wenig" und "am größten" quantifizieren.) Deswegen ist der Lanczos-Algorithmus ein ideales Werkzeug zur Berechnung der tatsächlich benötigten Eigenwerte und Eigenvektoren. Prinzipiell basiert dieser Algorithmus darauf, iterativ eine Hierarchie von orthonormalen Zuständen zu erzeugen, ausgehend von einem zufällig gewählten Vektor $|\phi_1\rangle$ auf welchen rekursiv der Hamiltonoperator angewendet wird. Nach M Schritten, wobei M durch geeignete Abbruchkriterien festgelegt wird, erzeugt der Algorithmus Eigenwerte ε_j und Eigenvektoren $|\Psi_j\rangle$ ($j = 1 \dots M$). Eine detaillierte Beschreibung des Algorithmus findet man zum Beispiel in [6].

Um die Summationen in Gleichung 3 ausführen zu können, entwickeln wir die Spuren und drücken Potenzen von H mit Hilfe der zuvor erzeugten Lanczos-Basis aus. Die Wiederaufsummierung der Exponentialfunktion liefert dann

$$\langle A \rangle \approx \frac{1}{Z} \sum_{n=1}^{N_{\text{st}}} \sum_{i=1}^M e^{-\beta \varepsilon_i^n} \langle n | \Psi_i^n \rangle \langle \Psi_i^n | A | n \rangle, \quad (4)$$

$$Z \approx \sum_{n=1}^{N_{\text{st}}} \sum_{i=1}^M e^{-\beta \varepsilon_i^n} \langle n | \Psi_i^n \rangle \langle \Psi_i^n | n \rangle. \quad (5)$$

Diese Relationen interpolieren zwischen $T \rightarrow 0$ (dem Grundzustandsproblem) und $T \rightarrow \infty$; sie sind in beiden Grenzfällen *exakt*.

Da die Summation über die Zustände über eine exponentiell große vollständige Basis läuft, haben die Gleichungen 4 und 5 in dieser Form noch keinen Vorteil gegenüber einer vollen Diagonalisierung des Problems. Man kann allerdings die Summation über die vollständige Basis $\{|n\rangle\}$ durch eine Mittelung über R Zustände mit zufällig gewählten Koeffizienten ersetzen. Für $[H, A] = 0$

kann man zeigen, daß der dadurch eingeführte numerische Fehler sich verhält wie

$$\tilde{A} = \langle A \rangle + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{RZ}}\right), \quad (6)$$

$$Z = e^{\beta E_0} \sum_{n=1}^{N_{\text{st}}} \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle. \quad (7)$$

Implementierung

Die Kombination der Hochtemperatur-Entwicklung, Gleichungen 4 und 5, mit der Zufalls-Mittelung liefert die endgültige Form der Näherung für den gesuchten Erwartungswert:

$$\langle A \rangle \approx \frac{N_{\text{st}}}{ZR} \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^M e^{-\beta \varepsilon_j^r} \langle r | \Psi_j^r \rangle \langle \Psi_j^r | A | r \rangle, \quad (8)$$

$$Z \approx \frac{N_{\text{st}}}{R} \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^M e^{-\beta \varepsilon_j^r} |\langle r | \Psi_j^r \rangle|^2. \quad (9)$$

Diese Gleichungen dienen uns als Grundlage für die Implementierung des Algorithmus.

Wir haben intensive Tests durchgeführt und unsere Berechnungen mit den Ergebnissen verglichen, die bereits mit anderen Methoden gewonnen wurden. Insbesondere haben wir die klassischen Resultate von Bonner und Fisher für den eindimensionalen Heisenberg-Magneten [7], die Arbeit von Shiba und Pincus zum Hubbard-Ring [8], und den Artikel von Bacci und anderen zum zweidimensionalen frustrierten Spin-1/2 Heisenberg-Modell [9] betrachtet. Aus dem Vergleich entnehmen wir die typischen Werte für unsere Parameter, die notwendig sind, um die gleiche numerische Genauigkeit zu erreichen: Für die Größe der Lanczos-Matrizen ergibt sich $M = 20 \dots 80$, und die notwendige Zahl der zufälligen Startvektoren beläuft sich auf $R = 200 \dots 1000$.

Als Beispiel ist in Abbildung 1 die Temperaturabhängigkeit der magnetischen Suszeptibilität $\chi(T)$ für $S = 1/2$ Heisenberg-Ringe mit 12, 16 und 20 Plätzen gezeigt. Mit den dünnen Linien in der Abbildung ist die Position und der Wert des Maximums von $\chi(T)$ für $T \rightarrow \infty$ nach Bonner und Fisher [7] bezeichnet.

Abbildung 2 zeigt die Temperaturabhängigkeit der Spin-Spin-Korrelationsfunktion L_2 für übernächste Nachbarn für den zweidimensionalen frus-

tion marks will become clear later on, where we give estimates for the parameters quantifying “few” and “largest”.) Therefore, the Lanczos algorithm is an ideal tool to generate the eigenvalues and eigenvectors needed. Its basic principle is to construct a hierarchy of orthonormal states starting with a normalized random vector $|\phi_1\rangle$ and applying the Hamiltonian recursively. After M steps, where M is subject to some convergence criterion, the algorithm generates eigenvalues ε_j and eigenvectors $|\Psi_j\rangle$ ($j = 1 \dots M$). For a detailed description of the algorithm see, e.g., Reference [6].

To perform the summations in Equation 3, we expand the traces and express powers of H in terms of the previously generated Lanczos basis. Re-summing the exponential leads to

$$\langle A \rangle \approx \frac{1}{Z} \sum_{n=1}^{N_{\text{st}}} \sum_{i=1}^M e^{-\beta \varepsilon_i^n} \langle n | \Psi_i^n \rangle \langle \Psi_i^n | A | n \rangle, \quad (4)$$

$$Z \approx \sum_{n=1}^{N_{\text{st}}} \sum_{i=1}^M e^{-\beta \varepsilon_i^n} \langle n | \Psi_i^n \rangle \langle \Psi_i^n | n \rangle. \quad (5)$$

These relations interpolate between $T \rightarrow 0$ (the ground state problem) and $T \rightarrow \infty$; they are *exact* in the two limiting cases.

Equations 4 and 5 are still of no practical advantage compared to full-diagonalization schemes, since the sampling over the states is done using an exponentially large complete basis set. In practice, it is sufficient to replace the summation over the full basis $\{|n\rangle\}$ by a sampling over R states with randomly chosen coefficients. For $[H, A] = 0$, one can show that the computational error introduced behaves like

$$\tilde{A} = \langle A \rangle + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{RZ}}\right), \quad (6)$$

$$Z = e^{\beta E_0} \sum_{n=1}^{N_{\text{st}}} \langle n | e^{-\beta H} | n \rangle. \quad (7)$$

Implementation

Merging the high-temperature expansion, Eqs. 4 and 5, and the random sampling yields the final approximations for the desired expectation value:

$$\langle A \rangle \approx \frac{N_{\text{st}}}{ZR} \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^M e^{-\beta \varepsilon_j^r} \langle r | \Psi_j^r \rangle \langle \Psi_j^r | A | r \rangle, \quad (8)$$

$$Z \approx \frac{N_{\text{st}}}{R} \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^M e^{-\beta \varepsilon_j^r} |\langle r | \Psi_j^r \rangle|^2. \quad (9)$$

These equations form the basis for our implementation of the algorithm.

We have performed intensive tests and compared our calculations with results determined by other means, in particular Bonner's and Fisher's classical results for one-dimensional Heisenberg magnets [7], Shiba's and Pincus' work on the Hubbard ring [8], or Bacci et al. for the two-dimensional frustrated spin-1/2 Heisenberg model [9]. Typical values needed to achieve the same numerical accuracy as in the cited literature are: for the Lanczos matrix size $M = 20 \dots 80$, and for the number of random starting vectors $R = 200 \dots 1000$.

As an example, Figure 1 shows the temperature dependence of the uniform magnetic susceptibilities $\chi(T)$ of $S = 1/2$ Heisenberg rings with 12, 16, and 20 sites, respectively. We have indicated the position and the value of the maximum of $\chi(T)$ for $T \rightarrow \infty$ according to Bonner and Fisher [7] by the lines in the figure.

Figure 2 shows the temperature dependence of the next-nearest neighbor spin-spin correlation function L_2 for the two-dimensional frustrated Heisenberg antiferromagnet on a 16-site square with periodic boundary conditions. This example demonstrates the crossover from the “simple” Néel-like antiferromagnetic phase at small values of the next-nearest neighbor coupling J' (where L_2 is ferromagnetic) to the collinear phase with two nested antiferromagnets for small values of J where (L_2 becomes antiferromagnetic).

Outlook

The development of our FTLM program package was focused on creating a flexible application which can be easily adapted to a new problem by just using different parameter files describing the Hamiltonian and the cluster considered as well as the operator for which an expectation value is desired. Additionally, the calling standard for the subroutines was designed in such a way that it is

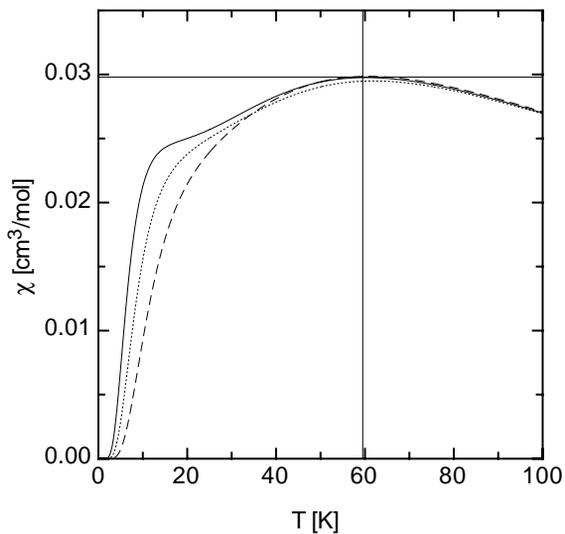


Abb. 1: Statische magnetische Suszeptibilitäten $\chi(T)$ für $S = 1/2$ Heisenberg-Ringe mit $N = 12$ (gestrichelte Linie), 16 (gepunktete Linie) und 20 Gitterplätzen (durchgezogene Kurve). Die dünnen Linien bezeichnen die Position und den Wert des Maximums von $\chi(T)$ für $T \rightarrow \infty$. Für die Darstellung haben wir die Werte $J = 4$ meV and $\mu = 2 \mu_B$ benutzt.

Fig. 1: Uniform magnetic susceptibilities $\chi(T)$ for $S = 1/2$ Heisenberg rings with $N = 12$ (dashed line), 16 (dotted line), and 20 sites (solid line). The thin lines indicate the maximum position and value of $\chi(T)$ for $T \rightarrow \infty$. We used $J = 4$ meV and $\mu = 2 \mu_B$ for the plot.

trierten Heisenberg-Antiferromagneten auf einem Quadrat mit 16 Gitterplätzen und periodischen Randbedingungen. Dieses Beispiel demonstriert den Übergang von der “einfachen” Néel-ähnlichen antiferromagnetischen Phase bei einem kleinen Wert für die Austauschwechselwirkung J' für übernächste Nachbarn – hier ist L_2 ferromagnetisch – zur kollinearen Phase für kleine Werte von J mit zwei ineinander verschachtelten Antiferromagneten, wo L_2 entsprechend antiferromagnetisch wird.

Ausblick

Unser Hauptaugenmerk bei der Entwicklung des FTLM Programmpakets lag darauf, eine möglichst flexible Anwendung zu erstellen, die an neue Problemstellungen leicht angepaßt werden kann, indem einfach verschiedene Parameterdateien benutzt werden, die den Hamiltonoperator und den betrachteten Cluster sowie den Operator beschreiben, für welchen der thermische Erwartungswert bestimmt werden soll. Weiterhin haben wir die Funktionsaufrufe dahingehend standardisiert, daß es leicht möglich ist, neue Module hinzuzufügen, die neue Hamiltonoperatoren wie zum Beispiel Pseudospin-Modelle beschreiben. Allerdings geht durch die beschriebene Flexibilität die Möglichkeit verloren, räumliche Symmetrien auszunutzen, um entweder die benötigten Ressourcen zu minimieren oder zu größeren Clustern zu kommen, ohne größere Rechenkapazitäten zu benötigen. (Die Spin-Symmetrie $[H, S_{\text{tot}}^z] = 0$ kann verwendet werden, genauso wie die Teilchenzahlerhaltung beim Hubbard-Modell.) Formal bedeutet das “nur” die Ersetzung

$$\frac{N_{\text{st}}}{R} \sum_{r=1}^R \rightarrow \sum_s \frac{N_{\text{st}}^s}{R_s} \sum_{r=1}^{R_s} \quad (10)$$

in den Gleichungen 8 und 9. Der Index s bezeichnet hierbei die verschiedenen Symmetrie-Sektoren (Quantenzahlen), zum Beispiel $s = k = 2\pi l / N$, $l = 0 \dots (N-1)$ für einen eindimensionalen Ring mit periodischen Randbedingungen. Unsere nächsten Vorhaben sind die Implementierung von Translationsinvarianz (bei periodischen Randbedingungen) und Punktgruppenoperationen sowie die Erstellung neuer Module zur Beschreibung neuer effektiver Hamiltonoperatoren. Eine weitere Option ist die Erweiterung der Programme auf die Berechnung von Spektralfunktionen. Das würde bedeuten, zwei Sätze von Lanczos-Eigenwerten und Eigenvektoren zu erzeugen, welche sich zum Beispiel um eins in ihrer Teilchenzahl oder magnetischen Quantenzahl unterscheiden.

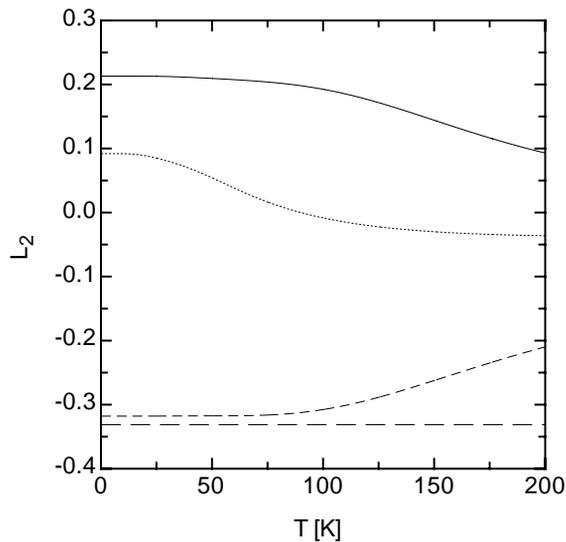


Fig. 2: Temperature dependence of the spin-spin correlation function $L_2 = 8\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$ with i and j labelling next-nearest neighbors for the two-dimensional frustrated Heisenberg antiferromagnet on a 16-site square with periodic boundary conditions at different ratios of J'/J . From top to bottom, $J'/J = 0.1; 0.5; 1; 10$. The plot was made with $J = 10$ meV.

Abb. 2: Temperaturabhängigkeit der Spin-Spin-Korrelationsfunktion $L_2 = 8\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$ (i und j bezeichnen übernächste Nachbarn) für den zweidimensionalen frustrierten Heisenberg-Antiferromagneten auf einem Quadrat mit 16 Gitterplätzen und periodischen Randbedingungen bei verschiedenen Verhältnissen J'/J . Von oben nach unten: $J'/J = 0.1; 0.5; 1; 10$. Die Abbildung wurde erstellt mit $J = 10$ meV.

made easy to add modules for new types of Hamiltonians, for example pseudospin models. The price we had to pay for this flexibility is that we cannot take spatial symmetries into account to either further reduce the computational resources needed or arrive at larger cluster sizes without the need for more powerful computers. (The spin symmetry $[H, S_{\text{tot}}^z] = 0$ can already be used where it applies, as well as particle number conservation in case of the Hubbard model). Doing so means “just” the replacement

$$\frac{N_{\text{st}}}{R} \sum_{r=1}^R \rightarrow \sum_s \frac{N_{\text{st}}^s}{R_s} \sum_{r=1}^{R_s} \quad (10)$$

in Eqs. 8 and 9, where s labels the different symmetry sectors exploited, e.g., $s = k = 2\pi l / N$, $l = 0 \dots (N-1)$ for a one-dimensional ring with periodic boundary conditions.

The implementation of translational invariance (periodic boundary conditions) and point-group symmetry operations as well as the addition of new modules describing new effective Hamiltonians will be the next steps. A further option would be to extend the application to the computation of spectral functions. This would imply generating two sets of Lanczos eigenvalues and eigenvectors for different starting states differing, e.g., by one in their particle and/or spin quantum number.

References

- [1] C. Lanczos, Journal of Research of the National Bureau of Standards 45, 255 (1950).
- [2] J. Jaklic and P. Prelovsek, Advances in Physics 49, 1 (2000), URL <http://taylorandfrancis.metapress.com/link.asp?id=yduuhjaffn%k4drx>.
- [3] J. Jaklic and P. Prelovsek, Physical Review B 49, 5065 (1994), URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v49/p5065>.
- [4] A. Langari, M. A. Martín-Delgado, and P. Thalmeier, Physical Review B 63, 144420 (2001), URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v63/p144420>.
- [5] B. Schmidt, V. Yushankhai, L. Siurakshina, and P. Thalmeier (2002), URL <http://xxx.uni-augsburg.de/abs/cond-mat/0210204>.
- [6] G. Grosso and G. P. Parravicini, in Memory Function Approaches to Stochastic Problems in Condensed Matter, edited by Evans, Grigolini, and P. Parravicini (John Wiley and Sons, New York, 1985), vol. 62 of Advances in Chemical Physics, chap. IV, pp. 133-181.
- [7] J. C. Bonner and M. E. Fisher, Physical Review 135, A640 (1964), URL <http://link.aps.org/abstract/PR/v135/pA640>.
- [8] H. Shiba and P. A. Pincus, Physical Review B 5, 1966 (1972), URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v5/p1966>.
- [9] S. Bacci, E. Gagliano, and E. Dagotto, Physical Review B 44, 285 (1991), URL <http://link.aps.org/abstract/PRB/v44/p285>.